• Si n = 2 , $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$

D'où y = x est une asymptote oblique à (C_2) au voisinage de $+\infty$

.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$; $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) + x = 0$

D'où y = - x est une asymptote à (C_2) au voisinage de $-\infty$.

• Si n ≥ 3 , $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$ (n ≥ 3)

⇒ (C_n) admet au voisinage de $\pm\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

2°/

a) $C_1 \cap C_2 = \{ O(0,0) ; A(1, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$

$f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où (C_n) admet exactement deux points fixes O (0 , 0) et A (1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

b) $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$